TD : Induction mathématique

Olivier Raynaud (raynaud@isima.fr)

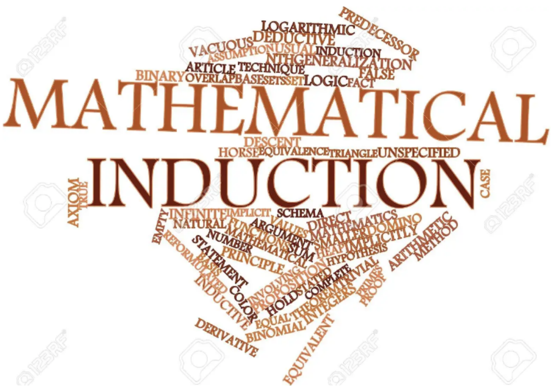

FIGURE 1 – Nuage de mot abstrait pour l'induction mathématique avec des étiquettes et des termes connexes. image ID : 16083991, Type de média :Banque d'images,Droit d'auteur :,radiantskies

Question 1. *Montrer par induction que si* $x > 4$ *alors* $2^x > x^2$.

Question 2. *Montrer que tout arbre a un noeud de plus que son nombre d'arêtes.*

Question 3. *Soit* T *un arbre binaire syntaxique produisant un mot* m *obtenu à partir d'une grammaire algébrique* $G = (V, T, P, S)$ *sous forme normale de Chomsky. Montrer que si on note* h *la hauteur de* T *alors nous avons* $|m| \leq 2^{h-1}$.

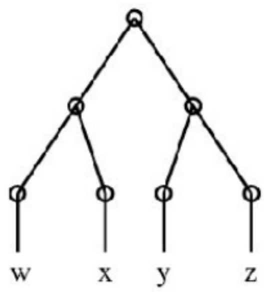

FIGURE 2 – Arbre syntaxique de hauteur 3 générant un mot $wxyz$ de taille 4

Exercice 1 (Arbre binaire parfait)**.**

Question 1. *On dit qu'un arbre binaire est parfait si chacun de ses deux sous-arbres ont la même hauteur. La hauteur d'un arbre réduit à un sommet est* 0*. Proposer une définition inductive de l'ensemble des arbres binaires parfaits.*

Question 2. *Prouver par induction structurelle que pour tout arbre binaire parfait t de hauteur h nous avons $|t| = 2^{h+1} - 1$ où $|t|$ est le nombre de sommets de t.*

Question 3. *Démontrer par induction que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = 1/6(n.(n+1).(2n+1))$.*

Question 4. *Soit n un entier naturel strictement positif. Le code de Gray $T(n)$ est une séquence de 2^n nombres binaires sur n bits telle que deux nombres adjacents diffËrent exactement par* 1 *bit. Montrer que le code de Gray existe pour tout entier naturel n.*

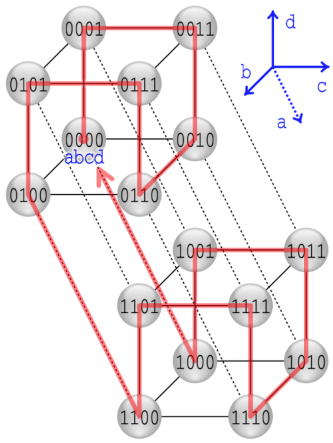

FIGURE 3 – Séquence dans un hypercube pour un code de Gray des nombres sur 4 bits.

Question 5. *Montrer que* $2^{2n} - 1$ *est divisible par trois pour tout entier naturel* n.

Question 6. *Un pavage d'un carré* $2^n.2^n$ *cases par des triominos est un arrangement de triominos qui couvre le carré (sauf une case) et sans chevauchement. Montrer par induction sur* n *que tout carré peut Ítre pavé par des triominos, pour* $n > 0$.

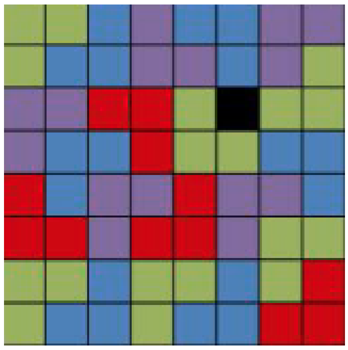

FIGURE 4 – Exemple de pavage du plan pour un carré $2^3 * 2^3$.